XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
*Sevilla, 24-28 septiembre 2007*
(pp. 1–8)

# Tratamiento asintótico de las condiciones de contorno para problemas de convección dominante

Tomás Chacón Rebollo[1], Macarena Gómez Mármol[1]
Isabel Sánchez Muñoz[2],

[1] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mails:* chacon@us.es,macarena@us.es.
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, E-41012 Sevilla. E-mail:* isanchez@us.es.

**Palabras clave:** Convección dominante, convección-difusión, perturbaciones singulares.

**Resumen**

En este trabajo realizamos un análisis de paso al límite singular en una ecuación evolutiva de convección-difusión, imponiendo el flujo total normal en la frontera de entrada de flujo y una condición de tipo Newmann en el resto de la frontera. Probamos que la solución de este problema converge en $L^2(Q)$ a la de la ecuación de convección pura con una condición de contorno de tipo Dirichlet en la frontera de entrada de flujo. Además convergen las derivadas convectivas en $L^2(Q)$ y las trazas convectivas en las fronteras de entrada y salida de flujo en espacios de tipo $L^2$. Este estudio permite justificar la forma en la que ciertos métodos numéricos de resolución de modelos de convección-difusión imponen las condiciones de contorno.

## 1 Introduction

Sea $\Omega$ un dominio acotado de $\boldsymbol{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $T > 0$ un tiempo final. Consideramos la ecuación evolutiva de convección-difusión siguiente:

$$\partial_t w + \boldsymbol{v} \cdot \nabla w - \mu \Delta w = f \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, T). \tag{1}$$

Aquí $\boldsymbol{v}$ es un campo de velocidades definido en un abierto $V$ que contiene a $\bar{\Omega}$ y que suponemos con divergencia nula en $V$, $\mu$ es un parámetro positivo que representa el coeficiente de difusión y $f$ una función dada en $\Omega \times (0, T)$.

Llamamos $\boldsymbol{n}$ al vector normal unitario y exterior que está definido en $\partial\Omega$. En función de la velocidad, la frontera de $\Omega$ se descompone de la forma $\partial\Omega = \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0$, siendo

$\Gamma^- = \{x \in \partial\Omega,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0\}$ y análogamente, $\Gamma^+$ y $\Gamma^0$. Las condiciones de contorno que acompañan a la ecuación (1) en cada parte de la frontera son:

$$w\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \mu\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = g\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{en} \quad \Gamma^- \times (0,T) \tag{2}$$

$$\mu\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{en} \quad (\partial\Omega \setminus \Gamma^-) \times (0,T) \tag{3}$$

con $g$ una función dada en $\Gamma^- \times (0,T)$. Nótese, que como $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ en $\Omega$, la ecuación (1) es una ley de conservación para el flujo $L = \boldsymbol{v}\,w - \mu\nabla w$. Por tanto, la condición (2) significa imponer el flujo total normal, $L\cdot\boldsymbol{n}$, en la frontera de entrada de flujo.

Finalmente, fijamos también una condición inicial

$$w(x,0) = w_0(x) \quad \text{en} \quad \Omega \tag{4}$$

con $w_0$ una función dada en $\Omega$.

De esta manera, tenemos planteado el problema de convección-difusión (1-4) que llamaremos $(P_\mu)$.

El objetivo de este trabajo es demostrar que cuando el coeficiente de difusión $\mu$ tiende a cero la solución de este problema converge, en un sentido conveniente, a la solución del problema de convección pura siguiente:

$$(P_0)\begin{cases} \partial_t w + \boldsymbol{v}\cdot\nabla w = f \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,T); \\ w = g \quad \text{en} \quad \Gamma^-\times(0,T). \end{cases} \tag{5}$$

La motivación de la que parte este estudio teórico es un problema numérico. Ciertas discretizaciones numéricas de las ecuaciones de convección-difusión conducen a imponer indirectamente el flujo total normal en la parte de frontera donde hay entrada de flujo. Por ejemplo, de forma rutinaria, se procede así cuando se utiliza un método numérico de tipo mixto Elementos Finitos-Volúmenes Finitos (véase [5], [6], [3], [4] como ejemplos). En este caso, el término convectivo es discretizado por el método de Volúmenes Finitos y el término difusivo por el método de Elementos Finitos. Esto permite tratar adecuadamente los efectos de convección dominante mediante técnicas descentradas, pero fuerza a imponer de forma indirecta las condiciones de tipo Dirichlet en la frontera de entrada de flujo, de manera que lo que realmente se impone es el flujo total normal. Ahora bien, cuando el flujo es predominantemente convectivo en esta parte de la frontera, lo más adecuado, desde el punto de vista físico, sería imponer condiciones de tipo Dirichlet.

Nos planteamos aquí el problema de analizar si esta forma de proceder numéricamente es correcta. Para ello, hemos considerado el problema $(P_\mu)$, un modelo lineal compuesto por una ecuación de convección-difusión fijando el flujo total normal en la frontera de entrada como condición de contorno. Y nos proponemos demostrar que cuando se trata de un problema de convección dominante ($\mu$ tendiendo a cero), su solución se aproxima a la de la ecuación de convección pura con condición de contorno de tipo Dirichlet en la frontera de entrada, el problema $(P_0)$.

El análisis que desarrollamos nos permite demostrar que se verifica la convergencia débil en un espacio de Hilbert cuya norma incluye la derivada convectiva y la convergencia fuerte en $L^2(\Omega\times(0,T))$, así como la convergencia de las trazas “convectivas” en un sentido conveniente. Ello es posible cuando la velocidad es suficientemente regular, para que el flujo tenga la propiedad de ser "rellenante". Esto es, las trayectorias que parten de la frontera de entrada rellenan el dominio, salvo un conjunto de medida nula, en un tiempo finito y acotado uniformemente. Esencialmente, esto permite resolver explícitamente la ecuación de convección integrándola a lo largo de las características (véase [1] para más detalles).

La estrategia que hemos seguido en el análisis de la convergencia se basa en considerar el problema regularizado del problema $(P_\mu)$ siguiente:

$$(P_{\mu,\varepsilon}) \begin{cases} \partial_t w + \boldsymbol{v}\cdot\nabla w - \mu\Delta w - \varepsilon\partial^2_{tt} w = f \quad \text{en} \quad \Omega\times(0,T); \\ w\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \mu\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = g\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{en} \quad \Gamma^-\times(0,T); \\ \mu\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \quad \text{en} \quad (\partial\Omega\setminus\Gamma^-)\times(0,T); \\ w - \varepsilon\partial_t w = w_0 \quad \text{en} \quad \Omega\times\{0\}; \\ \varepsilon\partial_t w = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\times\{T\}. \end{cases} \tag{6}$$

Este problema ha sido utilizado a modo de pivote, en el sentido de que la convergencia de la solución del problema $(P_\mu)$ a la solución del problema $(P_0)$ se obtiene como consecuencia de la convergencia de la solución de este problema, por una parte, a la solución del problema $(P_0)$ cuando $\mu$ y $\varepsilon$ tienden a cero y, por otra, a la solución del problema $(P_\mu)$ cuando $\epsilon$ tiende a cero. Cada uno de estos estudios se realizan en las secciones 3 y 4, respectivamente. Nótese que en este esquema relacionamos a tres problemas de diferente naturaleza: un problema elíptico $(P_{\mu,\varepsilon})$, un problema parabólico $(P_\mu)$, y un problema hiperbólico $(P_0)$, de manera que, en particular, la solución del problema parabólico se obtiene como límite de la solución del problema elíptico. Los resultados de convergencia obtenidos se demuestran mediante un argumento clásico de compacidad. La clave fundamental reside en obtener adecuadas estimaciones a priori de la solución del problema $(P_{\mu,\varepsilon})$, utilizando funciones test convenientemente elegidas. A ello se dedica la sección 2.

Un análisis de paso al límite semejante ha sido realizado en los trabajos de Bardos [2] y Lions [7]. Las diferencias fundamentales de estos trabajos respecto al nuestro son dos: por una parte, consideran condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas. De esta manera, sus estudios se centran en el paso al límite sólo en la ecuación de convección-difusión y no en las condiciones de contorno, como es lo relevante en nuestro caso. Por otra parte, añaden un término lineal de tipo reactivo a la ecuación de convección-difusión que permite controlar el término convectivo. En ambos casos además, sólo se considera el caso estacionario.

## 2 Estimaciones a priori del problema $(P_{\mu,\varepsilon})$

En lo sucesivo, suponemos la siguientes hipótesis de regularidad sobre los datos:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}\in\mathcal{C}^1(V), \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \text{ en } V; \\ w_0\in L^2(\Omega); \quad f\in \mathrm{L}^2(\Omega\times(0,T)); \quad g\in \mathrm{L}^2(\Gamma^-\times(0,T);|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|), \end{gathered} \tag{7}$$

siendo $L^2(\Gamma^- \times (0,T); |\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|)$, el espacio de las funciones definidas sobre $\Gamma^- \times (0,T)$ que tienen cuadrado sumable en esta parte de la frontera, respecto de la medida de Lebesgue con peso $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|$.

Si damos a la variable temporal $t \in \boldsymbol{R}$ el mismo tratamiento que a las variables espaciales $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, el problema evolutivo $(P_{\mu,\varepsilon})$ puede tratarse como un problema estacionario. Para ello, introducimos la siguiente notación. Se define el dominio espacio temporal $Q = \Omega \times (0,T) \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$, el operador $\widetilde{\nabla} = (\nabla_{\boldsymbol{x}}, \partial_t)$ y el campo de velocidades $\tilde{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}, 1)$, de manera que

$$\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\nabla} w = \partial_t w \,+\, \boldsymbol{v}\cdot\nabla w.$$

Llamamos $\tilde{\boldsymbol{n}} = (\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{x}}, \tilde{n}_t)$ al vector normal unitario y exterior que está definido en $\partial Q$. En función de la velocidad $\tilde{\boldsymbol{v}}$, la frontera de $Q$ se descompone de la forma $\partial Q = \Sigma^- \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^0$, siendo $\Sigma^- = \{(\boldsymbol{x},t) \in \partial Q,\ \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} < 0\}$ y análogamente, $\Sigma^+$ y $\Sigma^0$. Entonces $\Sigma^- = \Gamma^- \times (0,T) \cup \Omega \times \{0\}$ y $\Sigma^+ = \Gamma^+ \times (0,T) \cup \Omega \times \{T\}$, teniendo en cuenta que
$\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ 1 & \text{en} \quad \Omega \times \{0\} \\ -1 & \text{en} \quad \Omega \times \{T\} \end{cases}$

Con esta notación, el problema $(P_{\mu,\varepsilon})$ se escribe de la forma:

$$(P_{\mu,\varepsilon}) \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\nabla} w \,-\, \mu\,\Delta w \,-\, \varepsilon\,\partial^2_{tt} w \,=\, f \quad \text{en} \quad Q; \\ w\,\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} \,-\, \mu\,\nabla_{\boldsymbol{x}} w\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{x}} \,-\, \varepsilon\,\partial_t w\,\tilde{n}_t \,=\, \tilde{g}\,\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} \quad \text{en} \quad \Sigma^-; \\ \mu\,\nabla_{\boldsymbol{x}} w\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{x}} \,-\, \varepsilon\,\partial_t w\,\tilde{n}_t \,=\, 0 \quad \text{en} \quad (\partial Q \setminus \Sigma^-) \end{cases} \tag{8}$$

donde $\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{en} \quad \Gamma^- \times (0,T) \\ w_0 & \text{en} \quad \Omega \times \{0\} \end{cases}$. Es decir, la condición inicial se engloba junto con las condiciones de contorno en la frontera de entrada.

Con la regularidad que hemos supuesto para los datos (7), es inmediato comprobar, vía el teorema de Lax-Milgram, que el problema $(P_{\mu,\varepsilon})$ tiene una única solución débil $w_{\mu,\varepsilon} \in H^1(Q)$ en el sentido de la formulación variacional siguiente:

$$\begin{cases} w_{\mu,\varepsilon} \in H^1(Q) \quad \text{tal que} \quad \forall\, \phi \in H^1(Q) \\ (\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\widetilde{\nabla} w_{\mu,\varepsilon}, \phi)_Q \,+\, \mu(\nabla w_{\mu,\varepsilon}, \nabla\phi)_Q \,+\, \varepsilon(\partial_t w_{\mu,\varepsilon}, \partial_t\phi)_Q \,+ \\ \qquad +\,(w_{\mu,\varepsilon}, \phi)_{\Sigma^-} \,=\, (f,\phi)_Q \,+\, (\tilde{g}, \phi)_{\Sigma^-} \end{cases} \tag{9}$$

denotando por $(\cdot,\cdot)_Q$ y $(\cdot,\cdot)_{\Sigma^-}$ a los productos escalares en $L^2(Q)$ y $L^2(\Sigma^-; |\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}|)$, respectivamente.

**Teorema 1** *Bajo las hipótesis de regularidad para los datos (7), la sucesión de soluciones de los problemas $(P_{\mu,\varepsilon})$ dada por (9) verifica las siguientes acotaciones uniformes respecto de $\mu$ y $\varepsilon$:*

$$\{w_{\mu,\varepsilon}\} \ \textit{está uniformemente acotada en} \ L^2(Q); \tag{10}$$

$$\{\mu^{\frac{1}{2}}\,\nabla w_{\mu,\varepsilon}\} \ \textit{está uniformemente acotada en} \ L^2(Q); \tag{11}$$

$$\{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,\partial_t w_{\mu,\varepsilon}\} \ \textit{está uniformemente acotada en} \ L^2(Q); \tag{12}$$

$$\{w_{\mu,\varepsilon}|_{\Sigma^\pm}\} \ \textit{está uniformemente acotada en} \ L^2(\Sigma^\pm; |\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}|). \tag{13}$$

**Demostración:** En la formulación variacional (9), consideramos una función test de la forma $\phi = hw_{\mu,\varepsilon} \in H^1(Q)$, con $h$ una función que elegiremos de forma conveniente. En este caso, la integral del término convectivo da lugar a:

$$(\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\nabla} w_{\mu,\varepsilon}, hw_{\mu,\varepsilon})_Q = -\frac{1}{2}\int_Q \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\nabla} h \, |w_{\mu,\varepsilon}|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt + \frac{1}{2}\int_{\partial Q} h \, |w_{\mu,\varepsilon}|^2 \, \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}} \, d\gamma. \tag{14}$$

Teniendo esto en cuenta, parece claro, que podemos estimar la norma de $w_{\mu,\varepsilon}$ en $L^2(Q)$, eligiendo una función $h$ tal que $\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\nabla} h = -1$ en $Q$. Esta función, con las propiedades necesarias para poder acotar también las integrales que provienen de los términos difusivos, viene dada por el siguiente resultado técnico.

**Lema 1** *Bajo las hipótesis que hemos supuesto sobre la regularidad del dominio y el campo de velocidades $\boldsymbol{v}$, existe una función $h \in W^{1,\infty}(Q)$ tal que $\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\nabla} h = -1$ en $Q$ y $h \geq 1$ p.c.t. $\bar{Q}$.*

La demostración de este Lema puede verse con detalle en [8]. $\otimes$

## 3 Convergencia cuando $\mu$ y $\varepsilon$ tienden a cero

En esta sección, estudiamos la convergencia de la solución del problema $(P_{\mu,\varepsilon})$ a la solución del problema $(P_0)$, cuando $\mu$ y $\varepsilon$ tienden a cero. Aunque el problema de transporte es de tipo hiperbólico, le damos un tratamiento variacional, extendiendo la teoría desarrollada por Azerad en [1] al caso con dato de contorno no nulo. Para ello, definimos el espacio funcional asociado a la derivada convectiva $H(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q)$, como el completado de $\mathcal{D}(\bar{Q})$ dotado de la norma

$$\|\phi\|_{H(\tilde{\boldsymbol{v}},Q)} = \left[ \|\phi\|_{0,Q}^2 + \|\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\nabla}\phi\|_{0,Q}^2 \right]^{1/2}.$$

**Teorema 2** *Bajo las hipótesis de regularidad para los datos (7), cuando $\mu$ y $\varepsilon$ tienden a cero, la sucesión de soluciones de los problemas $(P_{\mu,\varepsilon})$ dada por (9) converge débil en $H(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q)$ y fuerte en $L^2(Q)$ a la solución por trasposición del problema $(P_0)$. Además, las trazas sobre las fronteras $\Sigma^\pm$ convergen fuerte en $L^2(\Sigma^\pm; |\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}|)$ a las trazas de la solución límite, respectivamente.*

**Demostración:** La demostración de este resultado se hace en las siguientes etapas:
**(I)** Siguiendo un argumento de compacidad, las acotaciones uniformes (10-13) nos permiten extraer una subsucesión de $\{w_{\mu,\varepsilon}\}$ que converge débil en $L^2(Q)$ a la solución por trasposición del problema $(P_0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in L^2(Q) \quad \text{tal que} \\ -(w, \, \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\nabla}\phi)_Q = (f, \phi)_Q + (\tilde{g}, \phi)_{\Sigma^-}, \quad \forall \, \phi \in H_0(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q, \Sigma^+) \end{array} \right. \tag{15}$$

siendo $H_0(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q, \Sigma^+)$ la clausura de $\mathcal{D}(\bar{Q}, \Sigma^+)$ en $H(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q)$.
**(II)** Utilizando que el flujo con velocidad $\boldsymbol{v}$ es rellenante, demostramos que la formulación por trasposición del problema de transporte es equivalente a otra formulación en un sentido más fuerte:

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in \mathcal{H}(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q) \quad \text{con} \quad w|_{\Sigma^-} = \tilde{g}, \quad \text{tal que} \\ (\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\nabla} w, \phi)_Q = (f, \phi)_Q, \quad \forall \, \phi \in L^2(Q) \end{array} \right. \tag{16}$$

donde $\mathcal{H}(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q)$ es un subespacio de $H(\tilde{\boldsymbol{v}}, Q)$ sobre el que se verifica la fórmula de Green:

$$(\Psi, \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\Phi)_Q + (\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\Psi, \Phi)_Q = (\Phi, \Psi)_{\Sigma^+} - (\Phi, \Psi)_{\Sigma^-}.$$

**(III)** Esta mayor regularidad de la solución límite nos permite demostrar la convergencia débil en $L^2(Q)$ de las derivadas convectivas y la de las trazas en $L^2(\Sigma^{\pm}; |\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}|)$.
**(IV)** Finalmente, la convergencia fuerte se obtiene demostrando la convergencia en la norma

$$\|\phi\|_* = \left[ \|\phi\|_{0,Q}^2 + \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} h|\phi|^2 \, |\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}| \, d\gamma \right]^{1/2}, \tag{17}$$

gracias a las propiedades de la función $h$, dadas en el Lema 1.
Los detalles de la demostración en cada una de estas etapas pueden consultarse en [8]. $\otimes$

# 4 Convergencia cuando $\epsilon$ tiende a cero

En esta sección, estudiamos la convergencia de la solución del problema $(P_{\mu,\varepsilon})$ a la solución del problema $(P_\mu)$, cuando $\varepsilon$ tiende a cero. Teniendo en cuenta la regularidad de los datos (7), el problema $(P_\mu)$ se engloba en el marco habitual para un problema parabólico. De esta manera, podemos asegurar que posee una única solución débil

$$w_\mu \in W(0,T; H^1(\Omega)) = \{\phi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)),\ \partial_t \phi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)')\},$$

en el sentido de la formulación variacional siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\mu \in W(0,T; H^1(\Omega)) \quad \text{tal que} \quad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega) \\[2mm] \dfrac{d}{dt}(w_\mu(t), \varphi)_\Omega \ + \ (\boldsymbol{v} \cdot \nabla w_\mu(t), \varphi)_\Omega \ + \ \mu(\nabla w_\mu(t), \nabla\varphi)_\Omega \\[2mm] \qquad + (w_\mu(t), \varphi)_{\Gamma^-} \ = \ (f(t), \varphi)_\Omega \ + \ (g(t), \varphi)_{\Gamma^-} \ \text{ en } \ \mathcal{D}'(0,T); \\[2mm] w_\mu(0) = w_0 \end{array} \right. \tag{18}$$

denotando por $(\cdot,\cdot)_\Omega$ y $(\cdot,\cdot)_{\Gamma^-}$ a los productos escalares en $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Gamma^-; |\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|)$, respectivamente.

**Teorema 3** *Bajo las hipótesis de regularidad para los datos (7), cuando $\varepsilon$ tiende a cero, la sucesión de soluciones de los problemas $(P_{\mu,\varepsilon})$ dada por (9) converge débil en $W(0,T; H^1(\Omega))$ a la solución del problema $(P_\mu)$ dada por (18). Además, las trazas sobre las fronteras $\Sigma^{\pm}$ convergen débil en $L^2(\Sigma^{\pm}; |\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}|)$ a las trazas de la solución límite, respectivamente.*

**Demostración:** Siguiendo de nuevo un argumento de compacidad, a partir de las acotaciones (10) y (11) tenemos que $\{w_{\mu,\varepsilon}\}$ está uniformemente acotada, respecto de $\varepsilon$, en $L^2(0,T; H^1(\Omega))$. Entonces podemos extraer una subsucesión que verifica las siguientes convergencias débiles, cuando $\varepsilon$ tiende a cero:

$$w_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup u_\mu \ \text{ en } \ L^2(0,T; H^1(\Omega));$$

$$w_{\mu,\varepsilon}|_{\Sigma^\pm} \rightharpoonup \alpha_\mu^\pm \ \text{ en } \ L^2(\Sigma^\pm; |\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}|).$$

Utilizando estas convergencias, calculamos el límite de cada uno de los términos de la formulación variacional del problema $(P_{\mu,\varepsilon})$ en (9) y obtenemos que en el límite, $u_\mu$ es solución del problema:

$$\begin{cases} u_\mu \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{tal que} \quad \forall\, \phi \in H^1(Q) \\ -(u_\mu, \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\nabla}\phi)_Q + \mu(\nabla u_\mu, \nabla\phi)_Q + (\alpha_\mu^+, \phi)_{\Sigma^+} = (f,\phi)_Q + (\tilde{g},\phi)_{\Sigma^-}. \end{cases} \tag{19}$$

Nuestro objetivo finalmente es identificar a $u_\mu$ como la solución del problema parabólico dada por (18) y para ello procedemos como sigue:
• A partir de (21), tomando en particular $\phi = \varphi\psi$, con $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ y $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, tenemos que $u_\mu$ verifica:

$$\begin{cases} u_\mu \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{tal que} \quad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega) \\ \dfrac{d}{dt}(u_\mu(t),\varphi)_\Omega - (u_\mu(t), \boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi)_\Omega + \mu(\nabla u_\mu(t), \nabla\varphi)_\Omega \\ \qquad + (\alpha_\mu^+(t),\varphi)_{\Gamma^+} = (f(t),\varphi)_\Omega + (g(t),\varphi)_{\Gamma^-} \ \text{ en } \mathcal{D}'(0,T). \end{cases} \tag{20}$$

• Por ser $u_\mu$ solución de este problema se tiene que $\partial_t u_\mu \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')$ y por tanto $w_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup u_\mu$ en $W(0,T;H^1(\Omega))$. Además, como $W(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T];L^2(\Omega))$, la aplicación traza $\phi \in \mathcal{D}([0,T];H^1(\Omega)) \mapsto \phi|_{\Sigma^\pm} \in L^2(\Sigma^\pm;|\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}|)$ se prolonga por continuidad a $W(0,T;H^1(\Omega))$. Esto nos permite identificar las trazas $u_\mu|_{\Sigma^\pm} = \alpha_\mu^\pm$, con lo que la formulación (22) es equivalente a (18).
• Por último, volviendo de nuevo a (21), con $\phi = \varphi\psi$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ y $\psi \in \mathcal{D}([0,T])$, recuperamos también la condición inicial. $\otimes$

# 5 Convergencia cuando $\mu$ tiende a cero

Como consecuencia inmediata de los resultados de convergencia de las secciones anteriores (Teoremas 2 y 3) obtenemos el resultado principal de este trabajo en relación a la convergencia de la solución del problema de convección-difusión $(P_\mu)$ a la del problema convectivo $(P_0)$.

**Teorema 4** *Bajo las hipótesis de regularidad para los datos (7), cuando $\mu$ tiende a cero, la sucesión de soluciones de los problemas $(P_\mu)$ dada por (18) converge débil en $H(\tilde{\boldsymbol{v}},Q)$ y fuerte en $L^2(Q)$ a la solución del problema $(P_0)$ dada por (16). Además, las trazas sobre las fronteras $\Gamma^\pm \times (0,T)$ convergen fuerte en $L^2(\Gamma^\pm \times (0,T);|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|)$ a las trazas de la solución límite, respectivamente.*

**Demostración:** La convergencia débil en $H(\tilde{\boldsymbol{v}},Q)$ es inmediata a partir de las convergencias débiles demostradas anteriormente:

$$w_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup w \ \text{ débil en } \ H(\tilde{\boldsymbol{v}},Q), \ \text{ cuando } \ \mu,\varepsilon \to 0;$$

$$w_{\mu,\varepsilon} \rightharpoonup w_\mu \ \text{ débil en } \ W(0,T;H^1(\Omega)), \ \text{ cuando } \ \varepsilon \to 0.$$

Para probar la convergencia fuerte en $L^2(Q)$ y la convergencia de las trazas, se considera la formulación variacional del problema $(P_\mu)$ (21) (identificando $\alpha_\mu^+ = w_\mu|_{\Sigma^+}$ ) que es equivalente a (18) y se toma como función test $\phi = h\,w_\mu$, con $h$ la función dada por el Lema 1. Entonces basta demostrar la convergencia en la norma (17), de forma análoga a como se hace en el Teorema 2. $\otimes$

## 6 Conclusiones

Como consecuencia de este estudio podemos dar una respuesta afirmativa al problema numérico que planteamos de partida. Es decir, para flujos gobernados por ecuaciones de convección-difusión, pero predominantemente convectivos en la frontera de entrada de flujo, imponer el flujo total en esta parte de la frontera es una buena aproximación a dar una condición de tipo Dirichlet. Además, esto es válido tanto flujos evolutivos como estacionarios. De esta manera, justificamos la forma de imponer numéricamente las condiciones de contorno en algunos métodos numéricos como los citados anteriormente.

### Agradecimientos

Esta investigación está parcialmente financiada por el Proyecto de Investigación MEC MTM2006-01275.

### Referencias

[1] P. Azerad, J. Pousin. *Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport.* C. R. Acad. Sci. París, vol. 322 (1996), 721–727.

[2] C. Bardos *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; theorèmes d'approximation; applications à l'équation de transport.* Ann. Scient, Éc. Norm. Sup., vol. 3 (1970), 185-233.

[3] S. Camarri, M. V. Salvetti, B. Koobus, A. Dervieux. *Large-eddy simulation of a bluff-body flow on unstructured grids.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 40 (2002), 1431–1460.

[4] T. Chacón, D. Franco, F. Ortegón, I. Sánchez. *Modelling of compressible flows with highly oscillating initial data by homogenization.* Applied Numerical Mathematics, vol. 26 (1998), 435–464.

[5] L. Hallo, C. Le Ribault, M. Buffat. *An implicit mixed finite-volume-finite-element method for solving 3D turbulent compressible flows.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 25 (1997), 1241–1261.

[6] C. Le Ribault, L. Le Penven, M. Buffat. *LES of the compressed Taylor vortex flow using a finite volume/finite element method on unstructured grids.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 52 (2006), 355–379.

[7] J.L. Lions. *Perturbations singulières dans problèmes aux limites et contrôle optimal.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 323, Springer-Verlag, Berlín- New York, 1973.

[8] I. Sánchez. *Estudio de un modelo de turbulencia compresible obtenido mediante técnicas de homogeneización.* Tésis de Doctorado, Universidad de Sevilla (2005).